100 ANYS DE (CO)-HOMOLOGIA

MANUEL CASTELLET
Membre de la Secció de Ciències i Tecnologia de l'Institut d'Estudis Catalans
Professor de la Universitat Autònoma de Barcelona

L'estudi d'objectes matemàtics corresponents a nocions comunes no contemplades encara en la matemàtica grega ni en la que es desenvolupà fins al segle XX, tals com la posició d'objectes a l'espai o la deformació d'objectes no rígids, ha estat a l'inici de la *Topologia*, branca que ha sofert un espectacular desenvolupament durant aquest segle, amb aportacions a totes les altres branques de les *Matemàtiques*, de la *Física Teòrica* i, recentment, d'altres ciències més allunyades, com pot ésser la *Bioquímica*.

La introducció de mètodes algebraics en l'estudi de problemes topològics i geomètrics ha estat una de les idees fonamentals d'aquest segle, no només pels resultats que hom ha pogut obtenir, sinó pels mètodes de demostració establerts i per l'ús d'aquestes tècniques a altres àmbits. Parlaré en aquest article de l'*Homologia* i de la *Cohomologia*; es tracta d'invariants numèrics, primer, i algebraics, més endavant, associats als objectes topològics, el coneixement dels quals permet obtenir una àmplia informació sobre l'objecte topològic en qüestió.

L'*Homologia* va néixer ara fa cent anys, amb els treballs d'Henri Poincaré (1854-1912), encara que si volem furgar en la seva prehistòria hauríem de passar pels treballs d'Enrico Betti (1823-1892) i de Bernhard Riemann (1826-1866), i arribar fins al teorema dels políedres de Leonhard Euler (1707-1783); però no ho farem.

EL CONCEPTE D'HOMOLOGIA I ELS NOMBRES DE BETTI SEGONS POINCARÉ

Diu Poincaré en el seu "Analysis Situs" [60]: "Considerem una varietat V de dimensió p, i sigui W una varietat de dimensió q ($q \leq p$) continguda a V. Suposem que la vora ("frontière complète") de W es descompon en r varietats ($q-1$)-dimensionals $V_1, \ldots, V_r$. Llavors posarem $V_1 + \cdots + V_r \sim 0$. De forma més general, la notació $k_1 V_1 + k_2 V_2 \sim k_3 V_3 + k_4 V_4$, on les k són enters i les V_i varietats ($q-1$)-dimensionals, significarà que existeix una varietat de dimensió q,

W, continguda a V, la vora de la qual es descompon en k_1 varietats poc diferents de V_1, ... Les relacions d'aquesta forma es podrien dir homologies" (traducció lliure). Observem la necessitat que tot passi dins la varietat V!

En el primer dels cinc complements que escriu al tombant del segle ja desapareix l'expressió «poc diferents» i precisa que «les homologies es poden sumar, restar, multiplicar per un nombre enter i algunes vegades dividir per enters".

Llavors, defineix els *nombres de Betti* P_j, $j = 1, \ldots, m-1$, d'una varietat m-dimensional com el nombre de varietats j-dimensionals tancades contingudes a V que no estan lligades per cap relació d'homologia, augmentat en 1 (els actuals nombres de Betti són els de Poincaré disminuits en 1). Observem que la relació entre els nombres de Betti P_j i els nombres de connexió p_j definits per Riemann i Betti, ve donada per $p_j = P_j + t_{j-1} + t_j$, on t_j es el nombre de *coeficients de torsió* parells en dimensió j (vegeu [12]).

Fou P. Heegaard [46] qui assenyalà la falta de precisió en la definició (per exemple, les subvarietats considerades han de ser orientables). Les crítiques de Heegard sobre els nombres de Betti i el teorema de dualitat van portar Poincaré a escriure els complements. De fet, la invariància dels nombres de Betti (i dels coeficients de torsió introduïts en el segon complement) no serà demostrada fins el 1915 per James W. Alexander (1888-1971).

EL TEOREMA DE DUALITAT

"Per a una varietat tancada, els nombres de Betti equidistants dels extrems són iguals" [60]. Per Poincaré aquesta frase s'aplicava a les varietats orientables i als nombres de Betti tal com ell els havia definits (vegeu a [62] la discrepància de Heegaard sobre aquesta qüestió). La demostració que en dóna en *Analysis situs* és molt incompleta: Sigui V una varietat tancada i orientable (això no ho diu Poincaré) de dimensió n. Si V_1 i V_2 són dues varietats de dimensió complementària, associa a cada punt de $V_1 \cap V_2$ un nombre + 1 o –1, amb l'ajuda d'un determinant funcional, i denota per $N(V_1, V_2)$ el nombre de (+ 1)'s menys el nombre de (– 1)'s. Per demostrar que $P_i = P_{n-i}$ per a tot i, considera $P_i - 1$ talls linealment independents $C_1, \ldots, C_{P_i-1}$ de dimensió i, i t varietats tancades $V_1, \ldots, V_t$ de dimensió $n - i$. Llavors demostra: "La condició necessària i suficient perquè hi hagi una homologia $\Sigma_j k_i Vj \sim 0$ és que $\Sigma k_j N(C_1,V_j) = \Sigma k_j N(C_2, V_j) = \cdots = \Sigma k_j N(C_{P_i-1}, V_j) = 0$. Ara bé, si $t > P_i - 1$, sempre es podran trobar enters k_j que compleixin aquestes condicions, ja que tindrem t k_j arbitraris i $P_i - 1$ condicions. Si les V_i són independents tindrem, doncs, $t \leq P_i - 1$. Pet tant, $P_{n-i} \leq P_i$; però, canviant i per $n - i$ s'obté $P_i \leq P_{n-i}$".

En [61] ja amb el concepte de matriu d'incidència i de políedre dual, Poincaré torna al mateix tema, i demostra el teorema de dualitat per a $n = 3$ ("La demostració es podria estendre a un políedre qualsevol"). Si P_j són els nombres de Betti del políedre i P'_j els del seu dual, Poincaré demostra que $P'_1 = P_2$, i que d'altra banda, $P'_1 = P_1$. (Una demostració en dimensió *n* la duu a terme en el segon complement [63]).

Teoremes com els de la *invariància de la dimensió* i de la *corba* de *Jordan* i estudis com els dels *camps vectorials sobre esferes* es duen a terme a començament de segle amb les eines introduïdes per Poincaré i les desenvolupades per Luitzen E. J. Brouwer (1881-1967).

GRUPS D'HOMOLOGIA. COEFICIENTS. PRODUCTES

Un canvi important en la formulació de propietats combinatorials bàsiques fou dut a terme a Göttingen entre 1925 i 1930 sota la influència d'Emmy Noether (1882-1935).

L'obra algebraica d'Emmy Noether influí en l'algebrització de la topologia de manera essencial, en reconsiderar els conceptes de cadenes, cicles i vores en el llenguatge de la teoria de grups; d'aquí sorgeixen els complexos de cadenes i els *grups d'homologia* que hom els associa. Una exposició de la teoria de l'homologia per a complexos simplicials amb aquestes idees, fou recollida el 1935 en el llibre "Topologie" [14] de Paul Aleksandrov (1896-1982) i Heinz Hopf (1894-1970), que van ésser a Göttingen junt amb E. Noether durant l'any 1926.

L'homologia d'un espai deixa d'ésser un invariant numèric per convertir-se en un invariant algebraic; els nombres de Betti i els coeficients de torsió introduïts per Poincaré representen la part lliure i la part de torsió dels grups d'homologia. Aquest fet elemental es repetirà diverses vegades: hom reconeix una realitat subjacent de la qual els objectes coneguts només n'havien deixat veure una part.

Independentment, Alexander introduí l'ús de coeficients Z_m en l'homologia [9], Salomon Lefschetz (1884-1972) el de coeficients racionals [52] i més tard, el 1934, Lev S. Pontrjagin (1908-1960) introduí coeficients en un grup abelià arbitrari [59]. D'aquesta manera la teoria d'homologia per a complexos simplicials anava adquirint un aspecte similar a l'actual.

Finalment citarem els treballs de Lefschetz [51] i de H. Künneth [49] i [50] que relacionaren l'homologia d'un producte de políedres amb la dels factors.

L'HOMOLOGIA DE ČECH

Un pas decisiu per a la unificació de les dues branques de la topologia, la conjuntista i l'algebraica, fou l'extensió de la teoria d'homologia, de políedres a espais més generals. La introducció del concepte de *nervi* per P. Aleksandrov

[13] representà el primer pas d'aquesta aproximació. La seva definició és la següent: "Sigui U = $\{F_1, \dots, F_n\}$ un recobriment tancat de l'espai (mètric compacte) R; a cada F_i li assignarem un punt p_i d'un espai euclidià, n-dimensional com a mínim, de manera que els p_i estiguin en posició arbitrària, i considerarem el símplex $(p_{i0}, \dots, p_{ir})$ si i només si la intersecció dels corresponents F'_s no és buida. El complex $N(R)$ així obtingut és un *nervi* de U". Els complexos $N(R)$ obtinguts a partir de recobriments cada cop més fins formen una «aproximació abstracta" de R, i, mitjançant aquesta aproximació es poden traslladar conceptes algebraics de $N(R)$ (com dimensió i nombres de Betti) a l'espai R. Així per exemple, Aleksandrov demostrà, després de tenir en compte els nervis per a recobriments oberts: "Necessari i suficient per tal que un espai R tingui dimensió n és que tot recobriment obert admeti un refinament tal que el seu nervi doni un complex de dimensió n".

L. Vietoris [76], el 1927, donà una definició d'homologia per a espais mètrics compactes basada en el concepte de distància; donat un espai mètric compacte R, considerava el complex simplicial $\bar{R}$ format per tots els símplexs els vèrtexs dels quals eren punts de R; si s es un símplex i $|s|$ el conjunt dels seus vèrtexs, la definició "diàmetre de s = diàmetre de $|s|$" convertia $\bar{R}$ en un complex mètric. A partir d'aquest complex Vietoris definia cadenes, cicles, homologia,... per a l'espai R.

Malgrat la incomoditat que suposa, aquesta teoria és a la base de la que definí Eduard Čech (1893-1960), el 1932, [30]: A cada recobriment obert finit de l'espai R li associa l'homologia del complex simplicial $N(R)$ derivat del seu nervi; quan considera els recobriments ordenats per inclusió obté un sistema invers de grups d'homologia, el límit del qual defineix com a l'homologia de l'espai R.

Més tard, el 1937, C. H. Dowker [33] demostrà que la definició de Čech condueix a assignar a la recta euclidiana grups d'homologia molt complicats, i el 1950 [34] donà la modificació convenient basada en l'ús de parells de recobriments infinits.

L'HOMOLOGIA SINGULAR

Amb el desig d'associar a tot espai topològic uns grups d'homologia, fou desenvolupada, paral·lelament a la teoria de Čech, la teoria de l'***homologia singular***.

L'idea bàsica fou exposada en el llibre d'Oscar Veblen (1880-1960) *Analysis situs* [74] el 1922: Una cadena singular d'un espai topològic X consistia en un complex K, una cadena de K, i una aplicació contínua de K a X. Posteriorment Lefschetz [54], el 1933, introduí per a cada dimensió el grup de les cadenes singulars de X: Considerant aplicacions contínues de símplexs orientats a X, dues d'elles, f i g, es diuen equivalents si entre els originals es pot establir una aplicació baricèntrica h tal que $g = fh$. Una clase d'equivalència és, llavors, un símplex singular orientat i el grup de les cadenes singulars amb coeficients en un grup abelià donat neix com a un grup de funcions amb valors en aquest grup, definides en els símplexs singulars orientats, nul·les excepte per a un nombre finit de símplexs. Per evitar la dificultat que suposa que dos símplexs singulars oposats coincideixin, Samuel Eilenberg (1913–) proposà el 1944 [41] substituir els símplexs orientats per símplexs ordenats.

REALITZABILITAT DE GRUPS PER HOMOLOGIA

Començo a plantejar aquí, en una situació molt elemental, un problema que tractaré diverses vegades en aquest article i al qual dedicaré el darrer paràgraf de forma exhaustiva: el problema de la realitzabilitat; ara, de la realitzabilitat dels grups per homologia: Si $\{A_i\}_{i\in \mathbb{N}}$ és una família de grups abelians, amb A_0 lliure, existeix un espai que els tingui com a grups d'homologia?

Aquesta mena de problemes apareixen sovint a les matemàtiques: A la teoria de Galois, quins grups són grups de Galois d'un polinomi? A l'anàlisi, quines àlgebres són isomorfes a l'àlgebra de funcions diferenciables sobre algun obert de $\mathbb{R}^n$?, etc. En el cas plantejat, el problema té sempre solució: l'espai buscat és una unió puntal d'esferes –per obtenir les parts lliures dels grups– i d'esferes a les quals se'ls ha adjuntat una cel·la d'una dimensió superior –que ens dóna les parts de torsió.

L'ANELL DE COHOMOLOGIA

El germen de la teoria de cohomologia ja es troba en el llibre de Lefschetz [53] quan parla dels "pseudocicles". Malgrat això no fou fins l'any 1935 quan hom començà a considerar sistemàticament la cohomologia, sobretot després de conèixer públicament el treball d'Alexander "On the chains of a complex and their duals" [10]. Si els grups de cohomologia no suposaren cap sorpresa per a la majoria de topòlegs de l'època, –de fet no són res més que els grups de caràcters dels grups d'homologia–, en canvi el fet que entre ells, per a espais i complexos arbitraris, es pogués definir un producte i per tant l'*anell de cohomologia*, que generalitza l'anell d'intersecció de varietats, sorprengué molt, ja que es creia que un anell d'aquest tipus només era possible en les varietats, pel fet d'ésser aquestes localment euclidianes.

Si K és un complex simplicial i A un grup abelià arbitrari, el grup de cocadenes de K es defineix com el d'homomorfismes del grup de cadenes de K en A i a partir d'ell s'introdueixen els grups de cohomologia. Per als complexos simplicials finits i els espais compactes, els grups d'homologia amb coeficients en el grup de caràcters de A són isomorfs als grups de caràcters dels grups de cohomologia amb coeficients en A.

Si A és un anell, en el grup de cocadenes de K hom pot definir una multiplicació compatible amb l'operador covora, i hom obté així l'anell de cohomologia.

En els complexos simplicials, l'anell de cohomologia s'obté mitjançant el cup-producte introduït per Hassler Whitney (1907-1984) [78]. Triada una ordenació dels vèrtexs del complex que defineixi l'orientació positiva dels símplexs, es defineix el cup-producte $c_p \cup c_q$ de dues cocadenes de dimensió p i q respectivament, com la cocadena tal que sobre tot $(p + q)$-símplex s_{p+q} pren el valor $\Sigma\, c_p(s^i_p)c_q(s^i_q)$, on s_p i s_q recorren la família de tots els parells de subsímplexs de s_{p+q} tals que el vèrtex final de s_p coincideix amb l'inicial de s_q.

Per acabar aquest apartat, citaré que Alexander utilitzà l'anell de cohomologia per estudiar el problema de les interseccions de varietats [11], i que Werner Gysin (1915–), en la seva tesis doctoral [45], desenvolupà la teoria de cohomologia quan estudià l'homologia d'espais fibrats.

A partir de l'any 1945 foren desenvolupades una sèrie de generalitzacions del cup-producte (sota la direcció de Norman E. Steenrood (1904-1960)), que portaren a l'estudi de les operacions de cohomologia. Més endavant estudiaré aquesta qüestió més detalladament.

REALITZABILITAT D'ÀLGEBRES PER COHOMOLOGIA

L'anell de cohomologia d'un espai amb coeficients en un anell A és una A-àlgebra graduada i commutativa, és a dir, una família $\{M_i\}_{i \geq 0}$ d'A-mòduls amb aplicacions bilineals $M_i \times M_j \to M_{i+j}$ associatives, amb element unitat, tal que si $x \in H^r(X, A)$ i $y \in H^s(X, A)$, $xy = (-1)^{rs}\, yx$.

Tornem a plantejar el problema de la realitzabilitat: donada una A-àlgebra graduada commutativa $M = \{M_i\}$, amb M_0 lliure, existeix un espai que la tingui com a àlgebra de cohomologia? Aquest és un problema no resolt, en el qual hom investiga activament, i del qual s'han obtinguts resultats parcials extraordinàriament interessants quan M és una àlgebra de polinomis.

Si $M = \mathbf{Z}[x]$ amb x de grau 2, aquesta és l'àlgebra de cohomologia de l'espai projectiu complex infinit; si el grau de x és 4, és l'àlgebra de cohomologia de l'espai projectiu quaterniònic infinit; ara bé, si $M = \mathbf{Z}[x]/x^3$, una àlgebra de polinomis truncada amb x de grau $2n$, el problema té clarament solució per a $n = 1,\ 2,\ 4$, però l'existència d'una solució equival a l'existència d'una aplicació $f : S^{4n-1} \to S^{2n}$ d'invariant de Hopf igual a 1, i aquest és un problema de gran interès per les seves conseqüències geomètriques: és equivalent a l'existència d'estructures d'àlgebra de divisió a $\mathbf{R}^{2n}$, a l'existència d'estructures de H-espai a S^{2n-1}, a la paral·lelització de S^{2n-1}, a l'existència de productes vectorials a $\mathbf{R}^{2n-1}$, etc.

Però resulta que no totes les àlgebres són realitzables; en l'àlgebra de cohomologia d'un espai hi ha una estructura més rica, que romangué amagada fins els treballs de Steenrod que comentaré en el pròxim paràgraf. Més endavant, a la pàgina 441, reprendrem aquest problema.

EL DESENVOLUPAMENT DE LA TEORIA DE (CO)-HOMOLOGIA

Dos fets a destacar: l'axiomatització donada per Eilenberg i Steenrod i l'ús cada vegada més estès d'operacions en cohomologia, iniciat pel propi Steenrod.

Un gran avantatge de l'axiomatització és la simplificació obtinguda en demostracions de teoremes; les demostracions són més simples i conceptuals, no cal anar arrossegant tota la maquinària pesada utilitzada en la definició dels grups de (co)-homologia. Tota axiomatització porta a noves tècniques i a un nou llenguatge, en el nostre cas concret, la introducció de diagrames, successions exactes,...; molts teoremes de la teoria d'homologia es redueixen ara a construir un diagrama adequat. El llibre d'Eilenberg-Steenrod "Foundations of algebraic topology" recull la proposta axiomàtica d'aquests autors. Vull fer notar aquí la diferència entre els sis primers axiomes i l'últim (anomenat de la dimensió); els sis primers són de caràcter general, mentre que el setè es molt específic, ja que imposa la condició que els n-grups d'homologia d'un punt s'anul·len per a $n \neq 0$. Aquest axioma no adquirí importància fins el 1960 quan es descobriren "teories de (co)-homologia" que només complien els sis primers axiomes (teoria K, (co)-bordisme,...).

L'estudi d'operacions de cohomologia ja començà amb la introducció del cup-producte i de l'anell de cohomologia del que he parlat abans. L'ús de l'anell de cohomologia donà resultats satisfactoris en la resolució de problemes de retracció o d'extensió. Malgrat això, el problema següent, per exemple, no es pot resoldre utilitzant només el cup-producte: considerem els espais projectius reals $P^2 \subset P^3 \subset P^4 \subset P^5$; sigui $X = P^5/P^2$ i $A \subset X$ la imatge de P^4 per la identificació; aleshores A no és un retracte de X [70].

Problemes com l'exposat estan íntimament relacionats amb les qüestions d'obstrucció i condueixen Steenrod a introduir el 1947 [66] els cèlebres *quadrats de Steenrod*. Vegem breument de quina manera la teoria d'obstrucció motiva els quadrats de Steenrod. Sigui K un complex i v un n-cocicle de K representant de $u \in H^n(K, \mathbf{Z})$. Construim $f : K^{n+1} \to S^n$ de la manera següent: $f|K^{n-1}$ = ct; si s és una n-cel·la, s s'aplica sobre S^n amb grau $v(s)$; per a cada $(n + 1)$-cel·la t, la seva vora s'aplica sobre S^n amb grau $v(\partial\ t)$ i aquesta aplicació s'estén a tot t. L'obstrucció per estendre f a K^{n+2} és un $(n + 2)$-cocicle $c(f)$ amb valors a $\Pi_{n+1}(S^n)$; la seva classe de cohomologia es pot escriure com Sq^2u. Per a $n = 2$ resulta que $Sq^2u = u \cup v$, i per a $n > 2$ Sq^2 es una aplicació $H^n(K, \mathbf{Z}) \to H^n(K, \mathbf{Z}_2)$. Obtenim així els quadrats de Steenrod [69].

Les fórmules d'Henri Cartan (1904–) sobre $Sq^i(u \cup v)$ permeten calcular els quadrats en espais projectius truncats i amb aquesta ajuda Steenrod i John H. C. Whitehead (1904-1960) demostraren a [70] que si $n + 1 = 2^k q$, $(2, q) = 1$, llavors S^n no admet una 2^k-varietat tangent. Aquest resultat representà un gran avenç, ja que abans només es coneixia per a $k = 0, 1$.

Fou el 1952 que el mateix Steenrod [67] abandonant el mètode d'Alexander-Čech-Whitney per al cup-producte i seguint, en canvi, el de Lefschetz d'aproximacions de cadenes a la diagonal, introduí les potències n-èssimes reduïdes, que són exemples d'operacions de cohomologia (això és, transformacions naturals d'un functor cohomològic en un altre). Encara més, són operacions estables, en el sentit que estan definides en cada dimensió i commuten amb la suspensió. El conjunt de totes les operacions estables de cohomologia mòdul p forma una àlgebra A_p, nomenada l' *àlgebra de Steenrod.* El 1952 Jean Pierre Serre (1926–) [65] demostrà que A_2 està generada pels quadrats, i el 1954 H. Cartan [27] provà un resultat anàleg per a tot primer senar. Mentrestant, José Adem (1921-1991) utilitzà els treballs de Steenrod per a buscar relacions entre els quadrats [8] i demostrà que Sq^i és descomponible si i no és potència de 2. Aquest resultat donà informació sobre l'invariant de Hopf. També cal citar que J. Frank Adams (1930-1989) aplicà els quadrats per calcular els grups d'homotopia estable de les esferes [4].

El mateix Adem demostrà que les seves relacions donaven lloc a operacions secundàries de cohomologia, que es diferencien de les anteriors per estar definides només en el nucli d'una certa operació primària i agafen valors en el conucli d'una altra operació primària. Adams va utilitzar operacions secundàries per a resoldre el problema de l'existència d'aplicacions d'esferes amb invariant de Hopf 1 [5], del que ja parlaré a la pàgina 441.

Mentrestant, Steenrod demostra a [68] que tot element de $H_q(\pi, G)$, on π és un subgrup del grup simètric de grau n, dóna lloc a una operació. Aquestes operacions contenen les antigues (que s'obtenen a partir d'un subgrup cíclic del grup de permutacions), així com les potències generalitzades introduïdes per Emery Thomas (1927–) a [71]. Més tard, Moore, Dold i Nakamura demostraren que totes les operacions de cohomologia s'obtenen a partir de les potències de Steenrod, les potències generalitzades, la suma, el cup-producte, els homomorfismes i els operadors de Bockstein.

ESPAIS D'EILENBERG-MACLANE

L'últim enfocament adoptat per Steenrod i Thomas per a estudiar les operacions de cohomologia utilitza els complexos $K(G, n)$, anomenats *complexos d'Eilenberg-MacLane*, introduïts per S. Eilenberg i Saunders MacLane (1909–) a [42] i [43]. Aquests espais són fonamentals en l'estudi de l'homotopia i sembla bastant clar que seran imprescindibles en la resolució completa del problema d'extensió.

Si G és un grup i $n > 0$ un enter (G abelià si $n > 1$), $K(G, n)$ és un espai arc-connex tal que tots els seus grups d'homotopia són zero excepte π_n que és isomorf a G. Per exemple, l'esfera S^1 és un $K(Z, 1)$, l'espai projectiu real infinit és un $K(\mathbf{Z}_2, 1)$, l'espai projectiu complex infinit és un $K(\mathbf{Z}, 2)$.

Els espais d'Eilenger-MacLane juguen, en la teoria d'homotopia, un paper dual al de les esferes. Malgrat que la seva homotopia és molt simple, la seva estructura homològica pot ésser molt complicada (al revès que el cas de les esferes). La dualitat es manifesta per la relació $H^n(X, G) = [X, K(G, n)]$ per a tot grup abelià G, tot n, i tot complex X. (Observem que $[S^n, X] = \pi_n(X)$). Aquesta dualitat està àmpliament estudiada en els treballs de Beno Eckmann (1917–) i Peter Hilton (1923–) [38] i [36].

La importància dels espais $K(G, n)$ en l'estudi de les operacions de cohomologia fou establerta per Serre a [65] quan demostrà que existeix una correspondència bijectiva entre $H^m(K(G, n), G')$ i el conjunt de totes les operacions de cohomologia naturals de $H^n(Y, G)$ a $H^m(Y, G')$. En aquest article Serre calculà la cohomologia dels $K(G, n)$ amb coeficients a $\mathbf{Z}_2$. Més tard H. Cartan la calculà amb coeficients a $\mathbf{Z}_p$ [28].

Existeixen espais d'Eilenberg-MacLane per a tot G i tot n, que en general són complexos infinits. Eilenberg i MacLane donaren una construcció basada en els complexos semisimplicials [43], però hom pot donar construccions purament geomètriques.

REALITZABILITAT DE LES ÀLGEBRES DE POLINOMIS, I

Com que l'àlgebra de cohomologia d'un espai és una àlgebra sobre l'àlgebra de Steenrod, hem d'enfocar el problema de la realitzabilitat des d'aquesta òptica. L'àlgebra $\mathbf{Z}[x]/x^3$ amb x de grau $2n$, que sabem que és realitzable com a mínim si $n = 1, 2, 4$, només ho serà quan $2n$ sigui una potència de 2, ja que aquests són els únics n per als quals pot existir una aplicació amb invariant de Hopf 1, com es desprèn de les relacions d'Adem. Però per a demostrar que 1, 2 i 4 són les úniques possibilitats encara cal explotar al màxim l'estructura de l'àlgebra de Steenrod i així ho feren J. Adem i J.F. Adams.

Existeixen a la cohomologia les anomenades operacions secundàries, que apareixen a partir de les relacions que hi ha a l'àlgebra de Steenrod. Si l'àlgebra M ha d'ésser realitzable, no només ha d'ésser compatible amb l'àlgebra de Steenrod, sinó que també ho ha d'ésser amb les operacions secundàries. Aquest estudi el feu J. F. Adams a [5], i demostrà:

(i) Si $S^{4n-1} \to S^{2n}$ té invariant de Hopf igual a 1, aleshores $n = 1, 2, 4$;

(ii) Si $\mathbf{Z}[x]/x^3$ és realitzable, aleshores grau $x = 2, 4, 8$;

(iii) Si S^n és un H-espai, aleshores $n = 1, 3, 7$;

(iv) Si $\mathbb{R}^n$ és una àlgebra de divisió, aleshores $n = 2, 4, 8$;

(v) Si S^n és paral·lelitzable, aleshores n = 1, 3, 7;

(vi) Si $\mathbf{R}^n$ admet un producte vectorial, aleshores $n = 3,7$.

(Vegeu J. Aguadé [3]).

TEORIES DE COHOMOLOGIA GENERALITZADES

Una *teoria de cohomologia generalitzada* és un functor que compleix els primers sis axiones d'Eilenberg-Steenrod per a cohomologia, però no necessàriament l'axioma de la dimensió. A partir del 1960 constitueixen uns dels temes més actius de la investigació en topologia.

El primer functor algebraic que presentava una certa analogia amb els functors de (co)-homologia (inclòs el teorema d'escisió) fou la *teoria K*, introuduïda per Michael Atiyah (1929–) i Friedrich Hirzebruch (1927–) el 1959 a [20] en intentar demostrar teoremes del tipus del Riemann-Roch per a varietats diferenciables. La teoria K fou desenvolupada àmpliament en un treball dels mateixos autors el 1961 [21]. Analitzarem una mica aquests articles.

Per a tot espai topològic X, Atiyah i Hirzebruch introdueixen [20] l'"anell dels fibrats vectorials complexos" sobre X, que denoten per $K(X)$. Gràcies als resultats obtinguts per Raoul Bott (1934–) un any abans [23] sobre els grups d'homotopia del grup unitari infinit (l'anomenat teorema de periodicitat de Bott estableix la periodicitat d'aquests grups d'homotopia, teorema que Adams considera "l'últim avenç realment inesperat"), K satisfà la fórmula de Künneth $K(X \times S^2) = K(X) \otimes K(S^2)$, que és fonamental, no només per a la demostració del teorema de Riemann-Roch diferenciable [20], sinó també per a l'eficiència en el càlcul de $K(X)$. (Atiyah i Bott donaren el 1964 [19] una demostració dels teoremes de periodicitat extraordinàriament elemental i elegant.)

Utilitzant el teorema de Bott, Atiyah i Hirzebruch [21] construiren una teoria de cohomologia periòdica. Per a cada enter n defineixen el grup abelià $K^n(X) : K^0(X) = K(X)$, $K^1(X) = \mathrm{Nuc}\,(K^0(X \times S^1) \to K^0(X))$ (aplicació induïda per la inclusió), i $K^{n+2}(X) \cong K^n(X)$. Llavors demostren que aquesta teoria compleix els axiomes d'Eilenberg-Steenrod excepte el de la dimensió: si X es redueix a un punt, $K^n(X)$ és $\mathbf{Z}$ per a n parell i 0 per a n senar.

Com un dels mètodes més efectius de càlcul introdueixen una successió espectral que relaciona la cohomologia ordinària amb la teoria K. Encara que ells només parlen de teoria K, el mètode s'aplica a qualsevol teoria de cohomologia generalitzada.

La resta del treball [21] és destinat a provar diferents resultats i a donar aplicacions de com la teoria K es més adient que la cohomologia ordinària en molts casos.

A partir d'aquest treball d'Atiyah-Hirzebruch els topòlegs es van llançar a l'estudi de les teories de cohomologia. Dels axiomes es dedueix, per exemple, la successió de Mayer-Vietoris, però l'interès més gran rau en la resolució de problemes geomètrics. El primer teorema en aquest camp és el teorema de representabilitat de E. H. Brown ([24], [25]), enunciat el 1962. Suposem donat un functor contravariant H definit en una categoria homotòpica de CW-complexos puntejats i amb valors en la categoria dels conjunts. El teorema de Brown dóna condicions necessàries i suficients senzilles perquè existeixi un isomorfisme natural $H(X) = [X, Y]$ per a algun CW-complex Y. La primera condició és l'axioma d'additivitat: $H(\vee_\alpha X_\alpha) = \Pi_\alpha H(X_\alpha)$; la segona condició és una mena d'axioma de Mayer-Vietoris. El teorema de Brown és extraordinàriament útil ja que permet construir CW-complexos Y. Vegem-ne alguns exemples:

[a] Per a l'exemple més trivial, suposem donat un espai Z i considerem el functor $[X, Z]$; aleshores obtenim un CW-complex Y i un isomorfisme natural $[X, Z] = [X, Y]$; és a dir, obtenim un CW-complex Y dèbilment equivalent a Z.

[b] Sigui $H(X)$ el grup de cohomologia ordinària $\tilde{H}^n(X; G)$. El complex Y obtingut és un complex d'Eilenberg-MacLane, ja que

$$\pi_r(Y) = [S^r, Y] = \tilde{H}^n(S^r; G) = \begin{cases} G & \text{si } n = r \\ 0 & \text{si } n \neq r \end{cases}$$

[c] Donat un grup topològic G, volem construir l'espai classificador BG. Definim un functor H agafant els G-fibrats sobre X i classificant-los en clases d'isomorfia. El functor H compleix els axiomes i tenim un CW-complex Y amb la propietat que els G-fibrats sobre X estan classificats per aplicacions $f: X \to Y$.

Pot passar que un tal functor H no estigui definit en tota la categoria dels CW-complexos sinó només en una subcategoria. Per exemple, el functor $\tilde{K}$ de Atiyah-Hirzebruch; aquesta definició només val per a complexos de dimensió finita; si intentem utilitzar-lo per a complexos de dimensió infinita no compleix l'axioma d'additivitat. El teorema de Brown segueix essent vàlid si H és definit en la categoria dels CW-complexos de dimensió finita, però l'espai Y obtingut és, en general, un CW-complex de dimensió infinita. (En el cas del functor d'Atiyah-Hirzebruch, el CW-complex Y obtingut és l'espai de llaços del grup unitari infinit.) Si H està definit només per als CW-complexos finits, el teorema deBrown segueix essent vàlid sempre que H agafi valors en la categoria dels grups, tal com ho ha demostrat recentment Adams [7].

Suposem que tenim una teoria de cohomologia generalitzada H que compleix l'axioma d'additivitat (J. Milnor [57]). Aleshores tenim una successió de functors H^n que compleix les condicions del teorema de Brown i, per tant, obtenim, una successió de complexos Y^n tals que $H^n(X) \cong [X, Y_n]$. Els isomorfismes de suspensió $H^n(X) \cong H^{n+1}(SX)$ condueixen a equivalències homotòpiques dèbils $Y_n \simeq \Omega Y_{n+1}$; com que els functors Ω i S són adjunts, obtenim finalment aplicacions $SY_n \to Y_{n+1}$. D'aquesta manera arribem a la noció d'espectre, introduïda per primera vegada per Lima. La definició d'un espectre utilitzada actualment és deguda a G.W. Whitehead [77]: Un espectre és una successió de CW-complexos (o d'espais del mateix tipus d'homotopia que un CW-complex) E_n junt amb aplicacions $e_n : SE_n \to E_{n+1}$, $n \in \mathbf{Z}$. Per exemple, l'espectre d'Eilenberg-MacLane ($E_n = K(G, n)$), el de les esferes ($E_n = S^n$), l'espectre unitari ($E_{\text{senar}} = U$, $E_{\text{parell}} = BU$), l'espectre de Thom ($E_{2n} = MU(n)$).

En parlar d'espectre no és pot oblidar el treball excel·lent de G. W. Whitehead "Generalised homology theories" [77]. Segons Whitehead, un espectre determina, no només una teoria de cohomologia generalitzada, sinó també una teoria d'homologia generalitzada: $H_n(X) = \lim_n \pi_{m+n}(E_m \wedge X)$. Per exemple, si E és l'espectre de les esferes, la teoria d'homologia que en resulta es l'homotopia estable; si E és l'espectre d'Eilenberg-MacLane s'obté l'homologia singular; si E és l'espectre de Thom, la teoria d'homotopia que en resulta és el bordisme complex (vegeu [17]).

Farem un incís per a parlar una mica de les teories de *bordisme* i *cobordisme*. El problema, originàriament posat per René Thom (1923–) [72] es el següent: dues m-varietats compactes M i M' es diuen cobordants si existeix una $(m+1)$-varietat amb vora i aquesta vora és la unió disjunta de M i M'. Això dóna una relació d'equivalència que divideix les varietats en classes de cobordisme. El problema és calcular quantes classes de cobordisme hi ha. Utilitzant la teoria de fibracions, Thom va demostrar que aquest problema es pot reduir a un problema de teoria d'homotopia. Aprofundim una mica més: Sigui ξ un $U(n)$-fibrat sobre un CW-complex X; sigui V el fibrat associat amb fibra $C^n \cup (\infty)$, i sigui V_∞ la secció a l'infinit. Llavors definim $M(\xi) = V/V_\infty$. En el cas particular en el qual ξ sigui l'$U(n)$-fibrat universal sobre $BU(n)$, $M(\xi)$ és, per definició, MU_n. Llavors el grup Ω_m^U de classes de cobordisme és isomorf a $\lim_n \pi_{m+2n}(MU_n)$; s'obté així un mètode de càlcul de Ω_m^U (vegeu [56], [73], [58]).

La successió espectral demostrada per Atiyah-Hirzebruch per a la teoria K es generalitza immediatament per a qualsevol teoria de (co)-homologia generalitzada. Per exemple, si h és una teoria de cohomologia i X un CW-complex, s'obté $E_2^{p,q} = H^p(X, h^q(S^0))$, i si a més a més X és de dimensió finita, la successió espectral convergeix finitament a $h^{p+q}(X)$ convenientment filtrat. Aquesta successió espectral permet, entre altres coses, demostrar teoremes de comparació entre teories de (co)-homologia [37] -en particular, tota teoria que compleixi l'axioma de dimensió es equivalent a la cel·lular!-, i deixar clar que essencialment l'interès d'una teoria de cohomologia h està associat amb la torsió de $h(X)$, ja que es compleix $h^q(X) \otimes Q \cong \oplus_{r+s=q} H^r(X; Q) \otimes h^s(S^0)$, (vegeu Dold [31]).

Molts dels resultats obtinguts per a teories de (co)-homologia (entre ells la successió espectral d'Atiyah-Hirzebruch), poden estendre's afunctors homotòpics. El llibre d'Albrecht Dold (1928–) "Halbexakte Homotopiefunktoren" [32] és fonamental en aquest aspecte.

Abans d'entrar en dos problemes concrets plantejats dins del marc de les teories de (co)-homologia (la teoria K dels espais de Eilenberg-MacLane i l'existència d'aplicacions fantasma), voldria parlar una mica més del teorema de representabilitat de Brown. És un punt clau per a la dualitat existent entre homotopia i cohomologia (dualitat d'Eckmann-Hilton [36]). Els conjunts $[X, Y]$ de classes d'homotopia entre dos espais proporcionen functors covariants en variar Y (del tipus dels grups d'homotopia) i contravariants en variar X (teories de cohomologia generalitzada) [38]. Aquesta dualitat es pot portar a les condicions necessàries perquè $[X, Y]$ sigui un grup i a les successions exactes (associades a una fibració o a una cofibració), i constitueix una dualitat estructural en topologia algebraica, en contraposició amb la dualitat aparentment existent entre homologia i cohomologia. En aquest sentit d'Eckmann i Hilton, els duals de les esferes són els espais d'Eilenberg-MacLane.

D'entre els espais els grups K dels quals convé calcular destaquen els espais d'Eilenberg-MacLane per la seva importància tant en teoria d'homotopia com en teoria de (co)-homologia. El primer treball en aquest camp està datat el 1961 i és degut a M.~Atiyah [18]. Atiyah demostra que si G és un grup finit i el complex d'Eilenberg-MacLane $K(G, 1)$ té esquelets finits $K(G, 1)^n$, llavors lim $K^*(K(G, 1)^n)$ és isomorf a la completació de l'anell de representacions complexes de G. Si lim $K^*(K(G, 1)^n)$ coincideix amb $K^*(K(G, 1))$ no es resol afirmativament fins 1966, després del treball de B.I. Gray [44], que comentarem més endavant.

Durant els anys 60 es progressà molt poc en aquest tema; concretament, fins el 1968 no aparequé el treball de D. W. Anderson i L. Hodgkin "The K-theory of Eilenberg-MacLane complexes" [16], en el qual, basant-se en els resultats d'Atiyah (només per a grups abelians) i en la successió espectral de Rothenberg-Steenrod [64], demostren que per a tot grup numerable G es té $\widetilde{K}^*(K(G, n)) = H^{**}(\widetilde{K}(G \otimes Q, n))$ per a $n \geq 3$ i també per a $n = 2$ si G és de torsió. La condició de numerabilitat quedarà com un impediment fins el 1974.

De 1968 a 1974 tenim un altre lapse en l'aparició de resultats importants en la teoria K dels espais d'Eilenberg-MacLane. El treball més interessant d'aquest període es el de J.W. Vick el 1973 [75], que estén la successió espectral de Rothenberg-Steenrod a teories d'homologia multiplicatives arbitràries, la qual cosa li permeté de dualitzar els resultats d'Anderson-Hodgkin.

Els resultats de Vick foren molt aviat superats per dos treballs de Z. Yosimura, de 1973 i 1974. En el primer [79] Yosimura demostra una mena de teorema dels coeficients universals per a la teoria K: existeix una successió exacta $\mathrm{Ext}\,(\widetilde{K}_{n-1}\,(X), Z) \to \widetilde{K}^n\,(X) \to \mathrm{Hom}\,(\widetilde{K}_n\,(X), Z)$. La demostració es basa fortament en la successió espectral d'Atiyah-Hirzebruch i en les notes d'Adams [6]. En el segon treball [80] demostra els resultats d'Anderson-Hodgkin tot eliminant-ne la condició de numerabilitat, resultats que foren demostrats independentment per Manuel Castellet (1943–) [29]. La demostració es basa en la successió exacta de [79], en l'ús de la teoria K amb coeficients en $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, i en el fet que els functors d'homologia commuten amb els colímits. De fet, la demostració de Yosimura-Castellet està feta per a la teoria K homològica, i generalitzen així els resultats de Vick, tot pasant després a cohomologia.

El segon tema que vull analitzar dins del camp de les teories de (co)-homologia es el problema de l'existència o no d'*aplicacions fantasma*. Primer ho considererem des del punt de vista (co)-homològic.

Sigui h una teoria d'homologia definida en la categoria dels complexos cel·lulars connexos. Sigui X un complex amb esquelets finits X^k; llavors si h està definida mitjançant un espectre, es compleix $h(X) = h(X^k)$, ja que els functors d'homotopia (i per tant els d'homologia) commuten amb els colímits. Més encara, Adams demostrà el 1971 [7] que si $\{X^\alpha\}$ és la família de tots els sub-CW-complexos finits de X i $h(X) = \mathrm{colim}\; h(X^\alpha)$, llavors h és una teoria representable (és a dir, definida a través d'un espectre).

La situació a cohomologia és totalment diferent. Sigui ara h^* una teoria de cohomologia generalitzada i X un CW-complex amb esquelets X^k. Les inclusions $X^k \to X$ indueixen aplicacions $h^n\,(X) \to h^n\,(X^k)$, i, per tant, una aplicació $\psi^n : h^n\,(X) \to \lim_k h^n\,(X^k)$, que segons [57] és sempre un epimorfisme. No obstant, J. Milnor demostra en [57] que ψ no és sempre un isomorfisme i calcula el seu nucli Nuc $\psi^n = \lim^1{}_k\, h^{n-1}\,(X^k)$, que pot ser no nul fins i tot en el cas en què h^* sigui una teoria representable.

Si h^* és representable per l'espectre B^*, és a dir, si $h^n\,(X) = [X, B^n]$, llavors $\psi^n : [X, B^n] \to \lim_k\, [X^k, B^n]$ ve definida per la següent relació: $\psi^n\,([f]) = (\ldots, [f|X^k], \ldots)$, i, per tant, Nuc ψ^n és el conjunt de classes d'homotopia d'aplicacions de X a B^n que restringides a cada esquelet X^k són homòtopes a una constant.

Situem-nos en el marc més general assenyalat per A. Dold en [32]: Sigui B un espai topològic i $t = [\;, B]$ el functor homotòpic definit sobre la categoria dels CW-complexos connexos amb esquelets finits, és a dir, $t(X) = [X, B]$ per a tot CW-complex connex X. Llavors existeix un epimorfisme de conjunts $\psi : t(X) \to \lim t(X^k)$, el nucli del qual són les classes d'homotopia d'aplicacions de X a B que restringides a cada esquelet X^k són nulhomòtopes. D'aquí neix el nom d'aplicacions fantasma: Una aplicació $f: X \to B$ es diu fantasma si $f|X^k \simeq$ ct, per a tot esquelet finit X^k de X.

L'estudi de Nuc ψ, o, equivalentment, del conjunt $Ph(X, B)$ de les aplicacions fantasma de X a B, constitueix un camp d'activa investigació. Vegem detalladament els desenvolupament històric dels resultats actuals.

La primera condició suficient per a l'anul·lació de $Ph(X, B)$ la donava B.I. Gray el 1966 [44]: "Si $H^n(\tilde{X}, \pi_{n+1})$ és finit per a tot n, llavors $Ph(X, B) = 0$". Aquesta condició ja és suficient per a provar la següent conjectura proposada per Atiyah i Hirzebruch en [21]: "Si BG és l'espai classificador d'un grup de Lie compacte G, llavors $[BG, BU] = \lim [(BG)^k, BU]$". La conjectura ja havia estat demostrada per al cas d'un grup de Lie compacte i connex per Anderson [15] i per V. M. Buhstaber i A. S. Miscenko [26]. La demostració en el cas general es basa en el teorema de Gray citat abans i en un resultat d'Armand Borel [22] que estableix que $H^*(BG, Q)$ és una àlgebra de polinomis engendrada per elements de dimensió parell.

La connexió que el resultat de Milnor, esmentat abans, estableix entre el conjunt d'aplicacions fantasma i el $\lim^1$, va portar a Atiyah a estudiar l'anul·lació d'aquest $\lim^1$ des d'un punt de vista purament algebraic. Per fer-ho, introdueix a [18] la condició de Mittag-Leffler: Un sistema invers de grups $\{G_i, f_i\}_{i\in N}$ compleix ML si, per a cada n, la filtració de G_n induïda per les imatges de les f_i és estacionària. El resultat d'Atiyah estableix que la condició ML és suficient per a l'anul·lació de $\lim^1 G_i$. Conseqüència d'això és, per exemple, que per a tot CW-complex X, tot grup G i tot nombre natural n, $Ph(X, K(G, n)) = 0$ (vegeu W. Meier [55]).

La condició d'Atiyah és, en general, complicada de comprovar i, a més només és necessària amb certes hipòtesis addicionals, per exemple si els grups G_i són numerables i les imatges de les f_i subgrups normals [44].

La successió espectral d'Atiyah-Hirzebruch $E(t, X)$ en la forma introduïda per Dold a [32] permet establir una condició necessària i suficient per a l'existència d'aplicacions fantasma en termes de la convergència de la successió. El resultat fonamental és el següent: "Sigui X un CW-complex connex amb esquelets finits i B un espai topològic amb grups d'homotopia numerables; llavors $Ph(X, B) = 0$ si i només si la successió espectral $E(t, X)$, on $t = [\ , \Omega B]$, convergeix finitament per a tot parell $(p, -p)$". Per a teories de cohomologia generalitzades la demostració d'aquest teorema apareix ja implícitament a [39] i [40]; per al cas general em remeto a [55]. La convergència de la successió espectral pot traduir-se en termes d'estabilitat del rang de certs grups abelians, rang que és calculable mitjançant l'ús de certes operacions de cohomologia.

Alguns del resultats demostrats amb ajuda de les tècniques que he citat són: a) $Ph(CP, S^3) = 0$, b) si G és abelià infinit de tipus finit i $n \geq 2$, $Ph(K(G, n), BU(m)) \neq 0$ per a n senar i $m \geq (n+1)/2$, i $PH(K(G, n), U(m)) \neq 0$ per a n parell i $m \geq (n+1)/2$, c) si G és de tipus finit, $Ph\ (K(G, n), BU) = 0$ per a n parell i $Ph\ (K(G, n), U) = 0$ per a n senar.

Recentment, utilitzant les tècniques de localització d'espais nilpotents exposades a [47] s'han pogut generalitzar molts dels resultats que he exposat per a CW-complexos amb esquelets no necessàriament finits.

REALITZABILITAT DE LES ÀLGEBRES DE POLINOMIS, II

Si G és un grup de Lie connex compacte i BG és l'espai classificador de G, la cohomologia $H^*(BG, \mathbb{F}_p)$ és una àlgebra de polinomis sobre $\mathbb{F}_p$ per a gairebé tots els primers p. És, doncs, natural preguntar-se quines àlgebres de polinomis finitament generades sobre $\mathbb{F}_p$ són realitzables com a àlgebres de cohomologia d'espais. Una llarga sèrie de resultats importants han estat obtinguts en aquesta direcció fruit de la investigació dels darrers 15 anys. Les dades que venen a continuació són extretes de [48].

El punt de partida fou el teorema d'Adams-Wilkerson [1], que estableix que, per a un primer p donat, tota àlgebra de polinomis amb generadors de graus primers a p és realitzable. Els primers exemples d'espais "exòtics" (és a dir, que no són espais classificadors de grups de Lie compactes) amb $\mathbb{F}_p$-cohomologia polinomial, amb p dividint els graus d'alguns generadors, es deuen a Alexander Zabrodsky (1936- 1986) [81] i a Jaume Aguadé (1953–) [2], que utilitza colímits homotòpics per a recuperar els exemples de Zabrodsky i obtenir-ne de nous. Aguadé realitza set àlgebres diferents com a àlgebres de cohomologia d'espais, i construeix exemples per a primers senars. El primer exemple d'un tal espai per al primer 2 ha estat obtingut per Dwyer-Wilkerson [35] aquest mateix any.

REFERÈNCIES

1. ADAMS, J. F. i WILKERSON, C. Finite H-spaces and algebras over the Steenrod algebra, *Ann. of Math.*, 1980, **111**, 95-143.

2. AGUADÉ, J. Constructing modular classifying spaces, *Israel J. Math.*, 1989, **66**, 23-40.

3. AGUADÉ, J. Com és d'algebraica la Topologia algebraica? *Pub. Mat. UAB*, 1981, **23**, 81-98.

4. ADAMS, J. F. On the structure and applications of the Steenrod algebra, *Comment. Math. Helv.*, 1958, **32**, 180-214.

5. ADAMS, J. F. On the nonexistence of elements of Hopf invariant one, Ann. of Math., 1960, **72**, 20-104.

6. ADAMS, J. F. *Lectures on generalized cohomology*, Lect. Notes Math. **99**, Springer (1966).

7. ADAMS, J. F. A variant of the E.H. Brown's representability Theorem, *Topology*, 1971, **10** , 185-198.

8. ADEM, J. The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1952, **38**, 720-726.

9. ALEXANDER, J. W. Combinatorial Analysis situs, *Trans. AMS*, 1926, **28**, 301-329.

10. ALEXANDER, J. W. On the chains of a complex and their duals, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1935, **21**, 509-511.

11. ALEXANDER, J. W. On the connectivity ring of an abstract space, *Ann. of Math.*, 1936, **87**, 698-708.

12. ALEXANDER, J. W. i VEBLEN, O. Manifolds on *n* dimensions, *Ann. of Math.*, 1913, **14**, 163-178.

13. ALEKSANDROV; P. Ueber die allgemeinen Dimensionsbegriff und seine Beziehung zur elementaren geometrischen Anschauung, *Math. Ann.*, 1928, **98**, 617-636.

14. ALEKSANDROV, P. i HOPF, H. *Topologie I*, Springer (1935).

15. ANDERSON, D. W. *Tesi doctoral*, University of California, Berkeley 1964.

16. ANDERSON, D.W. i HODGKIN, L. The *K*-theory of Eilenberg-Maclane complexes, *Topology*, 1968, 7, 317-329.

17. ATIYAH, M. F. Bordism and cobordism, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1961, **57**, 200-208.

18. ATIYAH, M. F. Characters and cohomology of finite groups, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 1961, **9**, 23-64.

19. ATIYAH, M. F. i BOTT, R On the periodicity theorem for complex vector bundles, *Acta Math.*, 1964, **112**, 229-247.

20. ATIYAH, M. F. i HIRZEBRUCH, F. Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds, *Bull. AMS*, 1959, **65**, 276-281.

21. ATIYAH, M. F. i HIRZEBRUCH, F. Vector bundles and homogeneous spaces, *Proc. Symp. Pure Math., AMS*, 1961, **3**, 7-38.

22. BOREL, A. Topology of Lie groups and characteristic classes, *Bull. AMS*, 1955, **61**, 397-432.

23. BOTT, R. The stable homotopy of the classical groups, *Ann. of Math.*, 1959, **70**, 313-337.

24. BROWN, E. H. Cohomology theories, *Ann. of Math.*, 1962, **75**, 467-484.

25. BROWN, E. H. Abstract homotopy theory, Trans. *AMS*, 1965, **119**, 79-85.

26. BUSHTABER, V. M. i Miscenko, A. S.; *K*-Theory on the category of infinite cell complexes, *Math. USSR Izv.*, 1968, **2**, 515-556.

27. CARTAN, H. Sur les groupes d'Eilenberg-MacLane $H(\pi, n)$, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1954, **40**, 467-471 i 704-707.

28. CARTAN, H. *Séminaire H. Cartan* **7** (1954-55).

29. CASTELLET, M. *K-Theorie der Eilenberg-MacLane Komplexe*, Forschungsinstitut für Math., ETH Zürich (1974-75).

30. ČECH, E. Théorie générale de l'homologie dans un space quelconque, *Fund. Math.*, 1832, **19**, 149-183.

31. DOLD, A. *Relations between ordinary and extraordinary homology,* Coll. Algebraic Topology, Aarhus (1962), 2-9.

32. DOLD, D. *Halbexakte Homotopiefunktoren,* Lect. Notes Math., **12**, Springer (1966).

33. DOWKER, C. H. Hopf's theorem for non-compact spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1937, **23**, 293-294.

34. DOWKER, C. H. Çech cohomology theory and the axioms, *Ann. of Math.*, 1950, **51**, 278-92.

35. DWYER, W. i WILKERSON, C. A new finite loop space at the prime two, *J. Amer. Math. Soc.*, **6** (1933), 37-64.

36. ECKMANN, B. *Cohomologíe et classes caractéristíques,* Proc. International Congress of Math., Estocolm (1962).

37. ECKMANN, B. *Cohomologie et classes caracteristiques*, CIME (1967), Ed. Cremonese, 21-95.

38. ECKMANN, B. i HILTON, P. J.; Groupes d'homotopies et dualité, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1958, **246**, 2444-2447, 2555-2558 i 2991-2993.

39. ECKMANN, B. i HILTON, P. H. Exact couples in abelian categories, *J. of Algebra*, 1966, **3**, 38-87.

40. ECKMANN, B. i HILTON, P. H. Composition functors and spectral sequences, *Comment. Math. Helv.*, 1967, **41**, 187-221.

41. EILENBERG, B. Singular homology theory, *Ann. of Math.*, 1944, **45**, 407-447.

42. EILENBERG, S. MacLane; Relations between homology and homotopy groups, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1943, **29**, 155-158 i *Annals of Math.*, 1945, **46** , 480-509.

43. EILENBERG, S. i MACLANE, S. On the groups $H(\pi, n)$, I-III, *Ann. of Math.*, 1953, **58**, 49-139 i 513-557.

44. GRAY, B. I. Spaces of the same n-type for all n, *Topology*, 1966, **5**, 241-243.

45. GYSIN, W. Zur Homologietheorie der Abbildungen und Faserungen von Mannigfaltigkeiten, *Comment. Math. Helv.*, 1941, **14**, 61-122.

46. HEEGAARD, P. Sur l'Analysis situs, *Bull. Soc. Math. France*, 1916, **44**, 161-242.

47. HILTON, P. J., MISLIN, G. i ROITBERG, J. Homotopical localization, *Proc. London Math. Soc.*, 1973, **26**, 693-706.

48. JACKOWSKI, S., MCCLURE, J. i OLIVER, B. *Homotopy theory of classifying spaces of compact Lie groups,* Alg. Top. and its Appl. (1994), 81-123.

49. KÜNNETH, H. Ueber die Bettishce Zahlen einer Productmannigfaltigkeit, *Math. Ann.*, 1923, **90** , 65-85.

50. KÜNNETH, H. Ueber Torsionszahlen von Productmannifgaltigkeiten, *Math. Ann.*, 1924, **91**, 125-134.

51. LEFSCHETZ, S. Intersections and transformations of complexes and manifolds, *Trans. AMS*, 1926, **28**, 1-49.

52. LEFSCHETZ, S. Closed point sets on a manifold, *Ann. of Math.*, 1928, **29**, 232-254.

53. LEFSCHETZ, S. *Topology,* AMS Colloq. Publ. **12** (1930).

54. LEFSCHETZ, S. On singular chains and cycles, *Bull. AMS*, 1933, **39**, 124-129.

55. MEIER. W *Tesi doctoral,* ETH Zürich 1975.

56. MILNOR, J. On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue, *Amer. J. Math.*, 1960, **82**, 505-521.

57. MILNOR, J. On axiomatic homology theory, *Pacific J. Math.*, 1962, **12**, 337-341.

58. NOVIKOV, S. P. Some problems in the topology of manifolds connected with the theory of Thom spaces, *Doklady Akad. Nauk USSR*, 1960, **132**, 1031-1034.

59. PONTRJAGIN, L. The general topological theorem of duality for closed sets, *Ann. of Math.*, 1934, **35**, 904-914.

60. Poincaré, H. Analysis situs, *J. École Polytech.*, 1895, **1**, 1-121.

61. Poincaré, H. Complément à l'Analysis situs, *Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1898, **13**, 285-333.

62. Poincaré, H. Sur les nombre de Betti, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1899, **128**, 629-630.

63. Poincaré, H. Second complément à l'Analysis situs, *Proc. London Math. Soc.*, 1900, **32**, 277-308.

64. Rothenberg, M. i Steenrod, N. E. The cohomology of classifying spaces of *H*-spaces, *Bull. AMS*, 1965, **71**, 872-875.

65. Serre, J. P. Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane, *Comment. Math. Helv.*, 1953, **27**, 198-231.

66. Steenrod, N. E. Products of cocycles and extensions of mappings, *Ann. of Math.*, 1947, **48**, 290-320.

67. Steenrod, N. E. Reduced powers of cohomology classes, *Ann. of Math.*, 1952, **56**, 47-67.

68. Steenrod, N. E. Homology groups of symmetric groups and reduced power operations, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1953, **39**, 213-217.

69. Steenrod, N. E. Cohomology operations and obstructions to extending continuous functions, *Advan. Math.*, 1972, **8**, 371-416.

70. Steenrod, N. E. i Whitehead, J. H. C. Vector fields on the n-sphere, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1951, **37**, 58-63.

71. Thomas, E. The generalized Pontrjagin cohomology operations and rings with divided powers, *Mem. AMS* **27** (1957).

72. Thom, R. Quelques proprietés globales des varietés differentiables, *Comment. Math. Helv.*, 1954, **28**, 17-86.

73. Thom, R. Travaux de Milnor sur le cobordisme, *Séminaire Bourbaki* **180** (1958-59).

74. Veblen, O. Analysis situs, *Col. Pub. AMS* **5**, part II (1922).

75. Vick, J. W. Some applications of the Rothenberg-Steenrod spectral sequence, *Osaka J. Math.*, 1974, **11**, 87-103.

76. Vietoris, L. Ueber den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhagstreuen Abbildungen, *Math. Ann.*, 1927, **97**, 454-472.

77 Whitehead, G. W. Generalised homology theory, *Trans. AMS*, 1962, **12**, 337-341.

78. WHITNEY, H. On products in a complex, *Ann. of Math.*, 1938, **39**, 397-432.

79. YOSIMURA, Z. Projective dimension of complex bordism modules over CW-spectra, *Osaka J. Math., 1973,* 10, 545-564.

80. YOSIMURA, Z. A note on complex K-theory of infinite CW-complexes, *J. Math. Soc. Japan*, 1974, **26**, 289-295.

81. ZABRODSKY, A. On the realization of invariant subgroups of $\pi^* X$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1984, **285**, 467-496.

(Original rebut per a publicació el dia 3 de juliol de 1994)